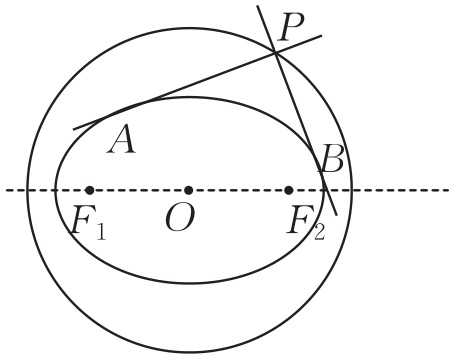
## **磨尖课09 蒙日圆的应用**

蒙日是法国著名的数学家，他首先发现椭圆、双曲线两条互相垂直的切线的交点的轨迹是圆，所以这个圆又被叫作“蒙日圆”.本课主要介绍蒙日圆的定义、证明及其几何性质.

### **一、蒙日圆的定义**



在椭圆上，任意两条相互垂直的切线的交点都在同一个圆上，它的圆心是椭圆的中心，半径等于椭圆长半轴长与短半轴长平方和的几何平方根，这个圆叫蒙日圆.如图，设椭圆的方程为，则椭圆两条互相垂直的切线,交点的轨迹是蒙日圆：.

### **二、蒙日圆的常用结论**

【结论1】过圆上任意一点作圆的两条切线，则这两条切线垂直.

【结论2】过圆上任意一点作椭圆的两条切线，则这两条切线垂直.

【结论3】过圆上任意一点作双曲线的两条切线，则这两条切线垂直.

【结论4】过圆上任意不同两点,作圆的切线，若切线垂直且相交于点，则动点的轨迹为圆.

【结论5】过椭圆上任意不同两点,作椭圆的切线，若切线垂直且相交于点，则动点的轨迹为圆.

【结论6】过双曲线上任意不同两点,作双曲线的切线，若切线垂直且相交于点，则动点的轨迹为圆.

其中，结论1，2，3为蒙日圆的必要性命题，即蒙日圆切线垂直；结论4，5，6为蒙日圆的充分性命题，即蒙日圆切线垂直.

### **磨尖点一 求轨迹方程**

典例1 [2024·咸阳模拟]已知椭圆的方程为，过平面内的点作椭圆的两条互相垂直的切线，则点的轨迹方程为( A ).

A. B. C. D.

[解析]设点，当切线斜率存在且不为0时，设切线方程为，

联立消去得，则，即，

两切线垂直，故其斜率之积为，则由根与系数的关系知，即.

当切线斜率不存在或为0时，点的坐标为或或或，满足方程，故所求轨迹方程为.故选.



1.设点的坐标及切线方程，与椭圆方程联立，将判别式为零转化为切线斜率的同解方程，化简即可，再验证切线斜率不存在或为0的情况是否符合即可.

2.椭圆的两条互相垂直的切线的交点的轨迹是圆.双曲线的两条互相垂直的切线的交点的轨迹是圆.

#### **磨尖训练**

已知双曲线的离心率为，若过点的双曲线的两条切线互相垂直，则双曲线的标准方程为.

[解析]由蒙日圆［结论得点的轨迹方程为,即点在圆上，则,因为,所以,.故其标准方程为.

### **磨尖点二 面积的最值**

典例2 [2024·恩施模拟]法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆.我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆.已知椭圆的蒙日圆方程为，现有椭圆的蒙日圆上一个动点，过点作椭圆的两条切线，与该蒙日圆分别交于，两点，若面积的最大值为28，则椭圆的长轴长为( B ).

A. 5 B. 8 C. 4 D. 10

[解析]由题意可知，椭圆的蒙日圆的半径为，因为，所以为蒙日圆的直径，所以，

因为，当且仅当时，等号成立，所以面积的最大值为，因为面积的最大值为28，所以，，故椭圆的长轴长为8.

故选.



根据蒙日圆的特征可知，是蒙日圆的直径，所以是定值；利用基本不等式性质可知存在最大值，就可以求得面积的最大值.

#### **磨尖训练**

画法几何的创始人——法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆.我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆.已知椭圆的蒙日圆方程为，椭圆的离心率为，为蒙日圆上一个动点，过点作椭圆的两条切线，与蒙日圆分别交于，两点，则面积的最大值为.（用含的代数式表示）

[解析]因为，所以，所以蒙日圆的方程为，

由已知条件可得，则为圆的一条直径，

由勾股定理可得，

所以，

当且仅当时，等号成立，

因此面积的最大值为.

### **磨尖点三 参数的范围**

典例3 已知椭圆任意两条互相垂直的切线的交点轨迹为圆，这个圆称为椭圆的蒙日圆.在圆上总存在点，使得过点能作椭圆的两条相互垂直的切线，则的取值范围是( D ).

A. B. C. D.

[解析]由题意可知，与椭圆相切的两条互相垂直的直线的交点的轨迹为圆，圆心为点，半径为2，在圆上，圆心，圆的半径为，又在圆上，所以两圆有公共点，又两圆的圆心距为,所以，所以.

故选.



以圆锥曲线和蒙日圆为背景，转化为圆和圆的位置关系，即转化为圆心距和半径的和差的不等式，从而求得范围.对于圆,可变形为，参照椭圆的结论,可得其对应的蒙日圆方程为.

#### **磨尖训练**

已知，若在直线上总存在点，使得过点的的两条切线互相垂直，则实数的取值范围为( A ).

A. B. C. D.

[解析]由题分析可知圆的蒙日圆方程为，即点的轨迹方程为,又点在直线上，所以直线与圆必有交点，即,解得.

故选.